UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PRÁCTICA # 3 ECUACIÓN DE BERNOULLI.

CONSERVACION DE LA MASA Y ECUACION DE BERNOULLI

Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de la masa aplicado al movimiento de fluidos. Al considerar el flujo a través de un volumen de control es fácil advertir que si durante un intervalo de tiempo la cantidad de masa que fluye (flujo másico) hacia él volumen de control no es la misma que la que sale de él, deberá existir un cambio en la cantidad de masa dentro del volumen de control. Entonces, si el flujo que sale es mayor que el que entra deberá obtenerse una disminución de la cantidad de masa dentro del volumen de control; por el contrario, se tendrá un aumento en ésta si el flujo que entra es mayor que el que sale.

$$\text{FLUJO MÁSICO}_{\text{ENTRA}} - \text{FLUJO MÁSICO}_{\text{SALE}} = \text{FLUJO MÁSICO}_{\text{ACUMULADO}}$$

De esta manera, basándonos exclusivamente en los conceptos físicos podemos obtener la expresión matemática de conservación de la masa para un volumen de control.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho \, dV\right) + \int_{SC} \rho \, U \, dA = 0$$

Esta ecuación se puede simplificar para el caso de un flujo incompresible, es decir, un flujo en el cual la densidad permanece constante. Como ρ es una constantey el tamaño del volumen de control es fijo, la conservación de la masa para un flujo incompresible resulta:

$$\int_{SC} u \cdot da = 0$$

Entonces:

$$um_a \cdot A_a = um_b \cdot A_b$$

donde:

um….. Velocidad media del fluido.

A…… área transversal de la sección de estudio: A= Base · Altura

Para cualquier perfil de velocidad, la velocidad media ha de poder calcularse utilizando la siguiente relación:

$$um = \frac{1}{L} \cdot \int_0^1 u \cdot dx$$

Pudiendose aproximar a:

$$um = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$$

donde:

n …….. número de mediciones en puntos ubicados regularmente

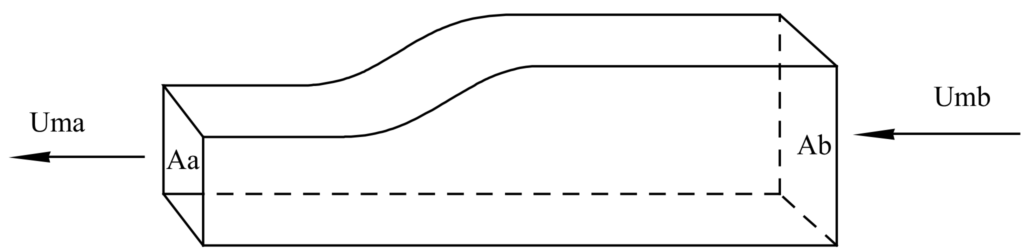


Figura 2.1 Isometría de una sección de prueba

Al integrar la ecuación de Euler para un flujo permanente a lo largo de una línea de corriente, resulta:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma} + g \cdot z = ctte$$

Esta ecuación recibe el nombre de la ecuación de Bernoulli y es aplicable cuando hay flujo permanente, incompresible, sin fricción y a lo largo de una línea de corriente. La ecuación de bernoulli puede aplicarse entre dos puntos cuales quiera en un línea de corriente entonces:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

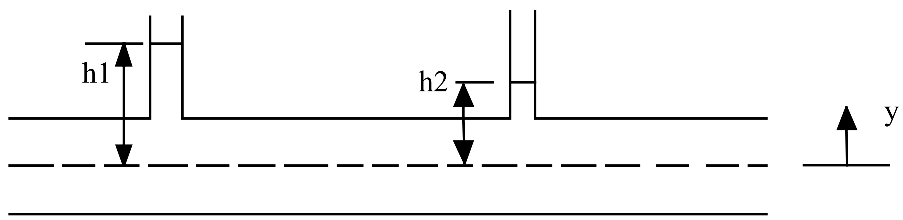
La ecuación anterior se cumple en condiciones ideales. En realidad el fluido pierde energía en la dirección del flujo, de esta forma se agrega un termino de perdida de energía a la ecuación, expresándose de la siguiente manera:

$$\frac{u_1^{\;2}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^{\;2}}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + Pérdidas_{\;1-2}$$

donde, la altura piezométrica, h_i, queda definido por la suma de dos términos:

$$h_i = \frac{p_i}{\gamma} + z_i$$

Esquemáticamente se puede representar de la siguiente forma:



En nuestro estudio en particular para una línea de corriente que pasa por el centro de un conducto rectangular se tiene:

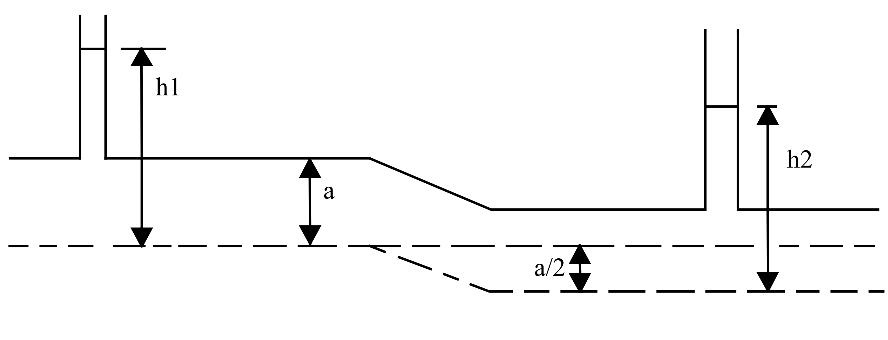


Figura 2.2 Línea de corriente que pasa por el centro de un conducto

Entonces aplicando la ecuación de Bernoulli tenemos:

$$\frac{u_1^{\;2}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{u_2^{\;2}}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{a}{2}$$

debido que:

$z_1 = 0$

$z_2 = -a/2$

o equivalentemente:

$$\frac{u_1^2}{2g} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + h_2$$

La diferencia de presiones pueden ser expresadas en termino de diferentes alturas piezométricas, quedando la velocidad expresada de la forma siguiente:

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h_i}$$

donde:

$\Delta h_i = ho_i - hest_i$

i ……. Posición cualquiera de la tubería

Si consideramos un volumen de control de flujo en dos intervalos de tiempo a través de una tubería, figura 1.

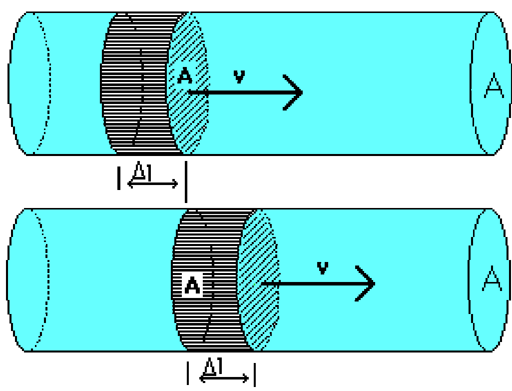


Figura 1

La variación de velocidad Δv se define como.

$$\Delta V = A \, \Delta l$$

$$\Delta l = v \, \Delta t$$

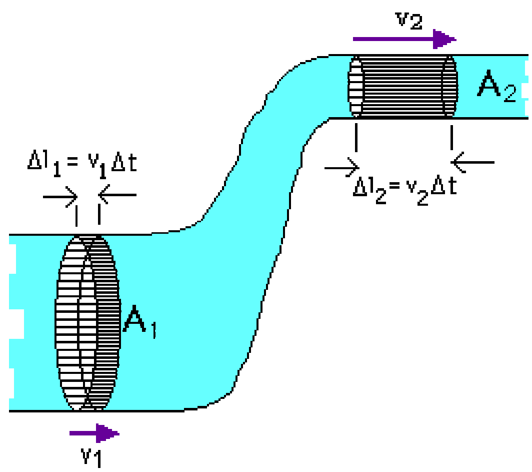
y la variación de masa se expresa como:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \, v \Delta t$$

El flujo másico de define como la variación de masa con respecto al tiempo $\Delta m / \Delta t$, obteniendo de la expresión

$$\Delta m / \Delta t = \rho \Delta V = \rho A v$$

Considerando cambios en las secciones transversales de control 1 y 2, tenemos:



$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

como la masa no se crea ni se destruye. La masa Δm_1 que entra en al sección 1 debe ser igual a la masa Δm_2 que sale por la sección 2, de donde

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

o

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Considerando flujo incompresible, tenemos

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Para flujos incompresibles (densidad constante) y un tamaño del volumen de control fijo, la conservación de la masa para un flujo incompresible resulta:

$$U_{ENTRADA} . A_{ENTRADA} - U_{SALIDA} . A_{SALIDA} = 0$$

Donde:

U : Velocidad del fluido en cada punto.

$U_{entrada}$: Velocidad media en la sección de entrada del volumen de control

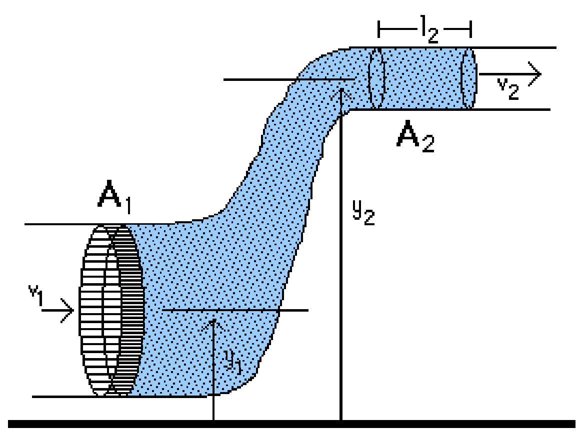
U_{salida} : Velocidad media en la sección de salida del volumen de control

A : Área transversal de la sección en estudio.

ECUACIÓN DE BERNOULLI (CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA)

Esta ecuación representa la energía por unidad de peso que posee un fluido que circula a través de un conducto cerrado. Dicha energía esta compuesta por tres conceptos básicos, energía potencial, energía de presión y energía cinética.

Energía potencial es aquella asociada a la altitud con respecto a un nivel de referencia arbitrario de un cuerpo o fluido. A mayor altura, mayor energía Ep = w .y (donde w es el peso del elemento y "y" la altura) [N.m]



Energía de presión representa la cantidad de trabajo necesario para mover el elemento de fluido a través de una cierta sección en contra de la presión p. Dicha energía se calcula como:

$E_{pre} = w .p /\gamma$ (donde γ es el peso específico del fluido) [N.m]

Energía cinética esta asociada a la velocidad del fluido

$$E_k = w\ .\ v^2/2g\ \ [N.m]$$

Entonces la energía total que posee el elemento es:

$$E = E_{pre} + E_p + E_k \qquad [N.m]$$

$$E = w\ .p\ /\gamma + w\ .y\ + w.v^2/2g \qquad [N.m]$$

Si consideramos dos puntos cualesquiera del conducto (1 y 2) tendríamos para cada punto

$$E_1 = w\ .p_1\ /\gamma + w\ .y_1 + w.v_1^2/2g \qquad [N.m]$$

$$E_2 = w\ .p_2\ /\gamma + w\ .y_2 + w.v_2^2/2g \qquad [N.m]$$

Ahora bien si en el transcurso del recorrido de 1 hasta 2 no se introdujo o extrajo energía E_1 debe ser igual a E_2

$$w\ .p_1\ /\gamma + w\ .y_1 + w.v_1^2/2g = w\ .p_2\ /\gamma + w\ .y_2 + w.v_2^2/2g$$

Dividiendo toda la expresión por w, obtenemos la ecuación conocida como Ecuación de Bernoulli:

$$p_1\ /\gamma + y_1 + v_1^2/2g = p_2\ /\gamma + y_2 + v_2^2/2g$$

Esta ecuación es aplicable cuando hay un flujo permanente, incompresible, sin fricción, sin la presencia de accesorios en el conducto y a lo largo de una línea de corriente.

La ecuación de Bernoulli puede aplicarse entre dos puntos cualesquiera de una línea de corriente, entonces:

La ecuación anterior se cumple en condiciones ideales. En realidad, el fluido pierde energía en la dirección del flujo, de esta forma se agrega un término de pérdidas de energía a la ecuación, expresándose de la siguiente manera:

$$h_1 + v_1^2/2g\ = h_2 + v_2^2/2g + \Delta h_{1\text{-}2}$$

Donde, la altura piezométrica, hi, queda definida por la suma de dos términos:

$$h_i = p_i\ /\gamma + y_i$$

Y las pérdidas, $\Delta h_{1\text{-}2}$, se pueden también expresar en función de la altura cinética como:

$$\Delta h_{1\text{-}2} = K.\ v_2^2/2g$$

Donde K es una constante dependiente del régimen del flujo, de la geometría y de las propiedades del fluido.